Examen - Convocatoria Extraordinaria

[**3 horas**]

- **No está permitido utilizar (ni acceder a) ningún tipo de documentación.**

1. Sea $Z(t)$ un proceso estocástico normal con media $\mu_Z(t) = -1$ y autocovarianza $\mathbb{C}\mathrm{ov}_Z(t, t+s) = t$, con $s > 0$ y sea Y una variable aleatoria continua, independiente de $Z(t)$, con función de densidad,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}y(2-y) & 0 \leq y \leq 2, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Se define el proceso $X(t) = Y + Z(t)$. Calcula:

a) la media del proceso, $\mu_X(t)$,
b) la función de autocovarianza $\mathbb{C}\mathrm{ov}_X(t, t+s)$, con $s > 0$.
c) ¿Sabes decir que procesos es $Z(t)$? Motiva tu respuesta.
d) ¿Es $X(t)$ débilmente o estrictamente estacionario? ¿Es $X(t)$ normal?

(2 Puntos)

2. Considera la cadena de Markov con estados $\{1, 2\}$, matriz de transición

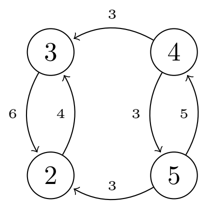
$$P = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

y que empieza en el tiempo 0 con distribución $\pi(0) = (1/2, 1/2)$. Calcula:

a) las matrices de transición de orden 2,
b) el valor de $\mathbb{E}[X^2(2)]$,
c) la distribución conjunta de $(X(2), X(3))$,
d) el valor de $\mathbb{E}[X^2(2)\, X(3)]$.

(3 Puntos)

3. Dada la cadena de Markov $X(t)$, $t \geq 0$, con estados $\{2, 3, 4, 5\}$, diagrama



y distribución inicial $\nu(0) = (5/6, 0, 1/6, 0)$. Calcula:

a) el generador de la cadena y la caracterización de los estados,
b) la matriz de transición de la cadena incrustada,
c) la distribución límite si existe y el valor de $\mathbb{E}[X(\infty)]$,
d) el tiempo medio de permanencia en el estado 5.

(3 Puntos)

4. Sea $Z(t) = B^2(t) - t$ y $T_2 = \inf\{t > 0 : |B(t)| = 2\}$.

a) Muestra que $Z(t)$ es una martingala.
b) Calcula $\mathbb{E}[T_2]$.

(2 Puntos)